Exercice N°8

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

1. Calculer u_1.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \times u_n$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

1 Calculer u_1.

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

($2(x+1)$: u' ; $\sqrt{x^2+2x+2}$: $\sqrt{u}$)

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{x^2+2x+2} \right]_{-1}^{0}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1-2+2}$$

$$u_1 = \sqrt{2} - 1$$